Олимпиада – 2019, 2 тур

1. Доказать, что функция $f(x)=\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{2}-\frac{x^2}{4}-\frac{x}{2}$ при целых x принимает целые значения.

2. Две вершины квадрата лежат на оси абсцисс, а две другие – на кривой $y=0.5\sqrt{4-x^2}$. Найдите площадь квадрата.

3. Дана бесконечная прямая стена и кусок гибкой проволоки длиной 100 метров. Как с их помощью оградить прямоугольный участок наибольшей площади?

4. В пирамиде $SABC$ все плоские углы при вершине A прямые, $AB=3, AC=4, AS=\sqrt{2}$. Точка O – центр вписанной в треугольник ABC окружности. Найти угол между прямыми BC и SO.

5. Найти количество действительных решений уравнения $xe^{-x}+e^{-x}+x^2/2=1.$

6. Составить уравнение касательной к графику четной функции $y=f(x)$ в точке с абсциссой $x_0=1$, если известно, что для всех действительных x справедливо равенство

$$f(2x^3-x)-4x^2\cdot f(x^2-x-1)=8x^5-8x^3-11x^2+2.$$

7. Найти предел $\lim\limits_{n\to\infty}\sin^2\left(\pi\sqrt{n^2+n}\right).$