Олимпиада – 2018, 2 тур

1. Найдите все такие квадратные уравнения $x^2+bx+c=0$, у которых оба коэффициента b и c являются решениями того же уравнения.

2. Даны отображения $f: X \to Y,\ g: Z \to X$. Известно, что $f \circ g$ – сюръективное отображение. Являются ли отображения f и g сюръективными? Ответ обоснуйте.

3. В треугольнике со сторонами a, b, c известно, что $a^2+b^2=5c^2$. Доказать, что две его медианы перпендикулярны.

4. Исследовать количество корней уравнения $x^3-3x-a=0$ в зависимости от a.

5. Доказать, что касательная к графику функции $xy=a^2$ образует с осями координат треугольник постоянной площади.

6. Вася находится в дремучем лесу, который по площади занимает ровно 100 км^2. Форма леса неизвестна, но лес сплошной, без полян. Вася хочет выбраться из леса, пройдя минимально возможное расстояние. Какова длина и форма минимального маршрута?

7. Функция $f(x)$ имеет производную в точке a. Найти предел $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{f(a+1/n)}{f(a)}\right)^n$.