1 курс

1. Пусть O – произвольная точка в плоскости треугольника ABC, Точки P, Q и R – точки пересечения медиан треугольников AOB, BOC и COA соответственно. Доказать, что точка O и точки пересечения медиан треугольников ABC и PQR принадлежат одной прямой.
2. Доказать, что если выполняются условия $m^2+n^2=1$ и $a^2+b^2+c^2=1$, то выполняется неравенство $|ma+nb+c|\le\sqrt{2}$.
3. На расстоянии 1 км от моста А вниз по течению реки расположен мост В. Когда спортсмен проплывал мимо моста А, направляясь к мосту В, ему бросили два мяча. Первый мяч он подхватил, а второй оставил плыть по течению. Проплыв с мячом некоторый участок реки, спортсмен оставил этот мяч и поплыл вверх по реке за вторым мячом. Подхватив второй мяч, снова повернул по направлению к мосту В и достиг его одновременно со свободно плывшим первым мячом. Какое расстояние пришлось проплыть спортсмену, если его собственная скорость все время была в k раз больше скорости течения?
4. Бригаде грузчиков выделена некоторая сумма денег на разгрузку баржи, однако 3 человека заболели и в работе не участвовали. Оставшиеся выполнили задание, заработав на 1,5 тыс. рублей больше, чем в случае работы в составе полной бригады. Определите выделенную бригаде сумму денег (тысяч рублей), если 5%-й сбор за банковский перевод обошелся работодателю дополнительно в величину, находящуюся в пределах от 1,2 до 1,6 тысячи рублей?
5. Последовательность (a_n) задана следующим образом: $a_1=1$, $a_{n+1}=\sqrt{a_n+2}$, $n=1,2,\dots$. Доказать, что последовательность имеет предел, и найти этот предел.
6. Вычислить интеграл $\int_0^{2\pi}\sin(\sin x+2021x)dx$.

2 курс

1. На сторонах AD и CD параллелограмма $ABCD$ взяты точки K и M так, что $AK:KD=1:1$, $CM:MD=2:3$. Отрезки AM и BK пересекаются в точке O. Найти площадь четырехугольника $KOMD$, если площадь параллелограмма $ABCD$ равна 520.
2. Какую наибольшую площадь может иметь параллелограмм $ABCD$, вписанный в кривую $x^2+4y^2-4=0$, если две его вершины находятся в точках $(\sqrt{3},1/2)$ и $(-\sqrt{3},-1/2)$? Какими при этом будут координаты оставшихся вершин?
3. Построить на комплексной плоскости область, заданную условием: $4\le|z+1|+|z-1|\le 5$.
4. Определите семейство линий в комплексной плоскости, заданных уравнением: $Im\,\frac{1}{z}=a$.
5. Среди всех равнобедренных треугольников, вписанных в данный круг, найти треугольник с наибольшим периметром.
6. Найти предел последовательности $S_n=\frac{1^\alpha+2^\alpha+\dots+n^\alpha}{n^{\alpha+1}}$, $\alpha>0$.

3 курс

1. Найти сумму коэффициентов многочлена:

   1) $f(x)=(x^2+2x-2)^{100}$; 2) $f(x)=(x^3-5x+2)^{211}(3-7x+9x^2-5x^3)^{135}$.
2. Доказать, что многочлен $f(x)=x^{2n}-nx^{n+1}+nx^{n-1}-1$ имеет корень кратности 3, равный 1.
3. Найти натуральный параметр $s(t)$ кривой $\boldsymbol{r}(t)=(3t-t^3)\boldsymbol{i}+3t^2\boldsymbol{j}+(3t+t^3)\boldsymbol{k}$, заданной на отрезке [0; 1].
4. Решите систему уравнений $\begin{cases}x^3+y^3=68,\\ x^2-y^2=7\sqrt{5}\end{cases}$ в действительных числах.
5. Диагонали AD, BE, CF шестиугольника $ABCDEF$ пересекаются в точке O внутри $ABCDEF$. Площади треугольников AOB, COD, EOF равны 1, 3, 9 соответственно. Найдите наименьшее значение площади шестиугольника.
6. Существует ли кривая, угловой коэффициент касательной которой в любой точке пропорционален абсциссе точки касания?