Олимпиада-2021, 2 тур

1. Аня и Боря взяли два положительных числа, сумма которых равна 1. Аня свое число возвела в степень a, а Боря свое – в степень b (a и b также положительны), а затем они перемножили полученные числа. Каким наибольшим может оказаться результат?

2. С помощью цифр 1,2,3,4,5 составили всевозможные четырехзначные числа, цифры в которых не повторяются. Чему равна сумма этих чисел? Чему равна сумма оставшихся четырехзначных чисел?

3. Найти все натуральные числа m, при которых уравнение $x^2 - 5mx + 84 = 0$ имеет хотя бы один целый корень.

4. Вася направился искать клад по руководству: «Пройти от березы к елке, повернуть направо, пройти столько же, сделать отметку. Вернуться к березе. Пройти от березы к сосне, повернуть налево, пройти столько же, сделать отметку. Копать посередине». Елка и сосна оказались на месте, березы нет. Может ли Вася найти клад?

5. Известно, что бесконечно дифференцируемая функция $f : R \to R$ удовлетворяет тождеству $f(x+y) \equiv f(x) + f(y) + 2xy$. Найти $f(2021)$, если $f(1) = -2021$.

6. Найти $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - (\cos x)^{\sin x}}{x^3}$.